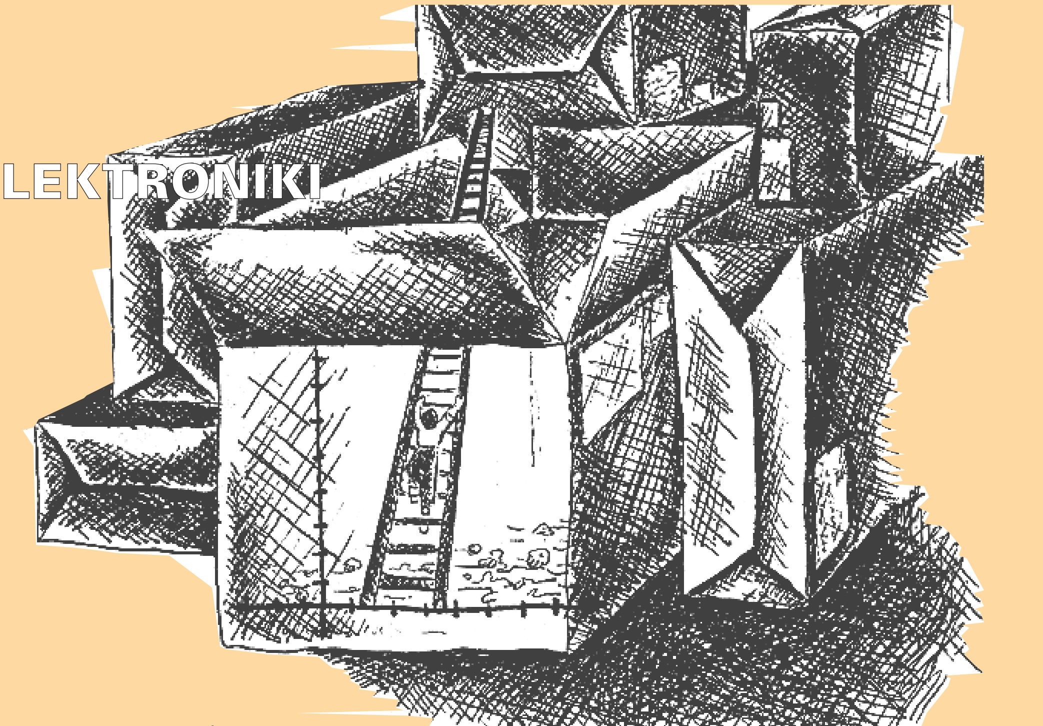
FUNDAMENTY ELEKTRONIKI



Liczby zespolone, II

W poprzednim miesiącu doszliśmy do wniosku, że graficzną reprezentacją liczby $\sqrt{-1}$ nie jest żaden punkt na osi liczb rzeczywistych...

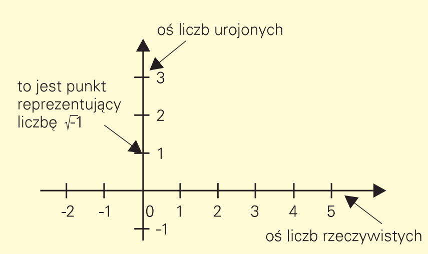
No właśnie, a niby dlaczego mamy się ograniczać do punktów na osi? Dlaczego nie mielibyśmy wprowadzić drugiej osi i wykorzystać płaszczyzny?

Genialna myśl! Na płaszczyźnie znajdziemy graficzną reprezentację liczby $\sqrt{-1}$. Na **rysunku 2** pokazuję ci nie oś liczbową, tylko „płaszczyznę liczbową”, zwaną płaszczyzną liczb zespolonych. Na płaszczyźnie tej mamy naszą starą znajomą: oś liczb rzeczywistych. Mamy też drugą, prostopadłą oś.

Rozszerzamy więc pojęcie liczby. Nadal graficzną reprezentacją liczb są punkty. Jeszcze wszystkiego nie rozumiesz, ale się chyba zbytnio nie zdziwisz, jeśli powiem, iż liczbę pierwiastek (drugiego stopnia) z -1 reprezentuje punkt na tej drugiej osi, w odległości jednej jednostki od punktu zerowego tej osi (to zresztą zgadza się z intuicją, która podpowiada, że pierwiastek z -1 powinien mieć jakiś związek z liczbą 1).

Ale liczby mogą leżeć nie tylko na obydwu osiach, lecz na całej płaszczyźnie.

Może zaprotestujesz, że jest to tylko abstrakcja, nie mająca nic wspólnego z rzeczywistością. Jak takie dziwaczne liczby dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić? Stop! Nie zabawiaj się znów w Fenicjanina, który nie potrafił sobie wyobrazić „odwrotnych”, i „niepełnych” owiec.



Rys. 2.

Niech do ciebie dotrze, że po prostu na razie tego nie umiesz, ale jest to możliwe, i nawet wcale nie trudne. O tym za chwilę.

Teraz już powinieneś wreszcie zrozumieć, dlaczego tłumaczę ci, jak chłop krowie na granicy, sprawę tych liczb zespolonych. Oczywiście wracamy do pojęcia oporności. „Czystą” rezystancję możemy wyrażać znanymi każdemu liczbami rzeczywistymi. Ale już do przedstawienia reaktancji, konieczne są jakieś „pełniejsze” liczby. I właśnie do obliczeń oporności, a ściślej mówiąc, impedancji doskonale nadają się liczby zespolone, które właśnie wspólnie przed chwilą „wykombinowaliśmy”.

Czy już wiesz jak zaznaczyć rezystancję, jak reaktancję indukcyjną, a jak pojemnościową?

Ale może na razie trudno ci jest uporządkować podane informacje. Wróć więc do poprzednich artykułów i pomału próbuj sobie wszystko poukładać w głowie.

Nie ty jeden masz kłopoty z upchnięciem sobie pod czaszką nowego pojęcia liczby, zrozumienia jej sensu i wykorzystania w praktyce. Pocieszę cię! Inni też mieli kłopoty, i dlatego długi czas, aż do dziewiętnastego wieku mówiono o osi urojonej i liczbach urojonych. Dlaczego urojonych? Wydawało się, że takie pojęcie liczby, jak pokazałem ci na rysunku 2 naprawdę nie ma związku z rzeczywistością – stąd nazwa – liczby urojone. Dopiero wielcy matematycy Hamilton i Gauss ugruntowali podstawy logiczne takich liczb. Okazało się, że wcale nie są to żadne liczby urojone, w domyśle – nieprawdziwe. Są to najprawdziwsze liczby – nazywamy je liczbami zespolonymi. Istnieją nie tylko w wyobraźni matematyków i na „płaszczyźnie liczbowej”.

Czy są to jakieś inne liczby, niż znane nam dobrze liczby rzeczywiste? Jak pokazuje rysunek 2, liczby rzeczywiste są po prostu tylko niewielką częścią (podzbiorem) zbioru liczb zespolonych. Wszystkie znane do tej pory liczby (rzeczywiste) mają swą reprezentację na jednej prostej – na osi liczb rzeczywistych. A oto teraz mamy do dyspozycji nie jedną prostą, lecz całą płaszczyznę. Czyli oprócz znanych nam liczb rzeczywistych mamy do dyspozycji nieskończenie wiele innych liczb. Po co nam te liczby? Za chwilę okażą się tak samo przydatne, jak „odwrotne owce” Fenicjan.

Sposoby zapisu liczb

Popatrz, oto kilka przykładów zapisu liczb rzeczywistych:

4

-1,2003419

$\sqrt{2}$

2π

$\frac{11}{19}$

-0,0909(09)

Ale liczby można zapisać inaczej, na przykład w systemie rzymskim CLXVII to liczba sto sześćdziesiąt siedem. Rzymski system zapisu jest jednak bardzo niepraktyczny, bo nie sposób zapisać przy jego pomocy liczb ujemnych, ułamków i liczb niewymiernych. Tym bardziej bezużyteczne są wcześniejsze systemy zapisu, na przykład fenicki, egipski czy babiloński.

Chcę ci tu pokazać, że liczba rzeczywiście jest abstrakcyjnym pojęciem matematycznym, a jej sposób zapisu może być rozmaity. Wybieramy taki sposób zapisu, który nam pasuje i jest wygodny przy obliczeniach.

Doszliśmy tu do ważnego pytania: jak zapisać liczby zespolone?

Popatrz na rysunki 1, 2. Liczby reprezentowane są na płaszczyźnie przez punkty.

Czy rozumiesz, że punkty na płaszczyźnie zespolonej nie są liczbami, tylko są graficznym przedstawieniem, czyli jakąś tam reprezentacją liczb?

W przypadku osi liczb rzeczywistych, do pełnego scharakteryzowania punktu odpowiadającego liczbie, wystarczy podać odległość od punktu początkowego (zerowego) oraz znak plus lub minus. Wszystko wskazuje, że teraz potrzeba będzie czegoś więcej.

Rzeczywiście, dla liczb zespolonych należy podać informacje, jednoznacznie lokalizujące punkt odpowiadający tej liczbie na płaszczyźnie zespolonej. I tu mamy kilka możliwości. Popatrz na **rysunek 3**. Weźmy jakąś liczbę zespoloną. Nazwijmy ją z. Niech jej graficzną reprezentacją na płaszczyźnie zespolonej będzie punkt z. Położenie punktu z na płaszczyźnie można określić podając jego dwie współrzędne, odniesione do obu osi. Znamy to z geometrii.

W każdym razie powiemy, że punkt z ma współrzędne (2, 2). Z grubsza biorąc znaczy to, że punkt z jest oddalony od osi pionowej o dwie odległości jednostkowe w prawo, i jednocześnie oddalony od osi poziomej o dwie odległości jednostkowe w górę.

Zgodnie z przyjętymi sposobami zapisu, powiemy, że dla liczby zespolonej a, zaznaczony na tymże rysunku punkt a ma współrzędne (-2, 1).

W geometrii powszechnie nazywa się oś poziomą osią X, a oś pionową – osią Y. Teraz jednak rozważamy sprawę liczb zespolonych. Nie mówimy tu o osi X i Y. Mamy natomiast oś liczb rzeczywistych (na rysunkach jest to oś pozioma), oraz nazwaną tak ze względów historycznych, oś liczb urojonych.

Poznaliśmy więc pierwszy sposób zapisu liczb zespolonych: za pomocą pary liczb (rzeczywistych). Pierwsza z tych dwóch liczb nazywana jest częścią rzeczywistą liczby zespolonej, a druga – częścią urojoną liczby zespolonej. Żeby nie było wątpliwości, należałoby jakoś oznaczyć obie części. Część rzeczywistą oznacza się Re (od angielskiego real), a część urojoną – Im (od – imaginary).

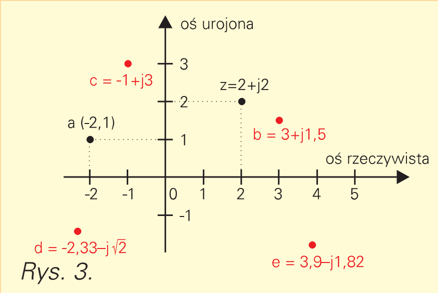
Przyjęto, że przy takim zapisie liczb zespolonych, najpierw podaje się część rzeczywistą, potem część urojoną. Dla uniknięcia pomyłek, część urojoną (imaginary) w matematyce poprzedza się małą literką i. W elektronice litera i kojarzy się z prądem, więc zamiast i, piszemy j.

Oto przykłady liczb zespolonych:

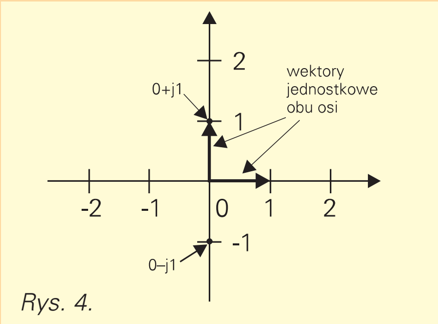
b = 3+j1,5
c = -1+j3
d = -2,33-j$\sqrt{2}$
e = 3,9-j1,82

Ich reprezentację graficzną na płaszczyźnie możesz zobaczyć na rysunku 3.

Zauważ, że na osi pionowej nie zaznaczyłem żadnego pierwiastka z minus jeden. Nie jest to oś żadnych „ujemnych pierwiastków”. Jest to oś podobna do osi liczb rzeczywistych (trochę upraszczając powiemy, że jest to druga, taka sama oś). Czy więc ów nieszczęsny $\sqrt{-1}$ jest



Rys. 3.



Rys. 4.

nam w ogóle potrzebny? Niekiedy mówi się, że właśnie literka j to ów $\sqrt{-1}$.

Nie jest to do końca prawdą. Uważaj! Co jest rozwiązaniem równania:

$x^2 = 1$

Inaczej mówiąc: $\sqrt{-1}$ równa się...?

Czy to tylko jedna liczba?

Oczywiście, że nie: rozwiązaniem są liczby -1 oraz 1. Tak samo rozwiązaniem równania:

$x^2 = -1$

też są dwie liczby. Jedna z nich to: 0+j1 (czyli po prostu j1), druga to 0-j1 (czyli -j1). Obie te liczby zaznaczyłem ci na **rysunku 4.**

Inaczej mówiąc, istnieją dwie (?!) liczby, które są pierwiastkami z minus jeden! A więc?

Pierwiastek z -1 wprowadziłem tylko po to, żeby ci pokazać, że są liczby, które nie są liczbami rzeczywistymi. Teraz już $\sqrt{-1}$ nie będzie ci do niczego potrzebny. Zapominamy o nim.

Ale co z pionową osią? Tak jak mówiłem, nie jest to żadna oś „ujemnych pierwiastków. Po prostu mamy teraz całą masę liczb. Kiedyś mieliśmy „tylko” liczby rzeczywiste. Do ich graficznej reprezentacji wystarczyła jedna prosta. Teraz, do graficznej reprezentacji liczb zespolonych potrzebna jest płaszczyzna.

Jeszcze raz ci powtarzam, punkty nie są liczbami. Fenicjanin nierozerwalnie kojarzył liczby z owcami. My, przyzwyczajeni od dawna, skłonni jesteśmy utożsamiać liczby z punktami na osi. Nie potrafimy wyobrazić sobie „gołej” liczby; liczby jako takiej – zawsze musimy podpierać się jakimś wyobrażeniem: owiec, punktów, palców u rąk, itp.

Teraz mamy płaszczyznę zespoloną. Liczby reprezentowane są przez punkty.

Musimy znaleźć jakiś sposób na zapanowanie nad całym tym bałaganem.

Oprócz osi liczb rzeczywistych, na płaszczyźnie tej umieszczamy więc drugą oś, która pomoże nam w prosty sposób zapisać dowolne liczby zespolone.

Mówię „umieszczamy”; czy to znaczy, że tej osi moglibyśmy tam nie umieszczać? Tak! Nie zapominaj, że mówimy o liczbach (czyli pojęciach abstrakcyjnych). Wśród liczb nie ma żadnych osi – wyobrażamy sobie te osie, rysujemy na płaszczyźnie tylko po to, żeby znaleźć dobry i prosty sposób „zapanowania nad nimi” czyli zapisu liczb zespolonych.

Nie potrzeba tu żadnego $\sqrt{-1}$. Potrzebne natomiast są jakieś odcinki, czy raczej wektory jednostkowe na poszczególnych osiach. Wektory te zaznaczyłem ci na rysunku 4. Literkę j w zapisie liczby zespolonej możemy więc raczej traktować, jako wektor jednostkowy (tzw. wersor) osi urojonej.

Stąd już tylko jeden krok do dalszego rozszerzenia pojęcia liczby. Najpierw mieliśmy oś liczbową. Wystarczyło to dla zobrazowania wszystkich liczb rzeczywistych. Teraz wprowadziliśmy płaszczyznę zespoloną, na której możemy przedstawić wszystkie liczby zespolone. Chyba się już domyśliłeś, że można jeszcze bardziej rozszerzyć pojęcie liczby. Graficzną reprezentacją takich „rozszerzonych liczb, będą punkty w przestrzeni. Do zapisu takich liczb można wykorzystać trójki liczb, które określą odległość od poszczególnych osi. A czy można dodać jeszcze jedną, czwartą oś? Oczywiście! Nie tylko czwartą, ale i piątą, szóstą itd. Nie bardzo potrafimy wyobrazić sobie przestrzeni więcej niż trójwymiarowej, ale nie tylko można tak robić, ale tak się robi, i co ciekawe... liczby takie są powszechnie wykorzystywane w obliczeniach technicznych. Naukowcy przypuszczają, że nasz wszechświat może być 10-wymiarowy. Jeśli tak jest, to w do opisujących go obliczeń należy używać liczb, które można zapisać w postaci nie pary, trójki, czy czwórki, ale dziesiątki liczb (rzeczywistych). Przykładowo liczbą taką jest liczba u:

u = 2,4+j2,39-k0,023+l562,4+m31,4--n0,000012-o23-p9,91+r1,1-s3,33

Poszczególne literki j...s oznaczają tu wektory jednostkowe (wersory) kolejnych osi (wymiarów). Czy takie liczby można mnożyć, dzielić, dodawać, odejmować itp? Tak! Ale to już historia z zupełnie innej bajki.

Wracajmy do liczb zespolonych, bo za bardzo odeszliśmy od elektroniki i naszej impedancji.

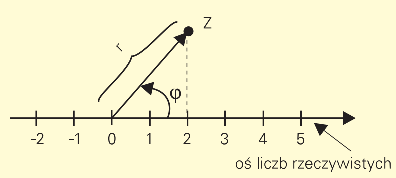
Powiedzieliśmy, że liczby można zapisywać w różny sposób. Przed chwilą poznałeś sposób zapisu liczb zespolonych w postaci zwanej algebraiczną lub kanoniczną. Spotyka się też określenia zapis prostokątny (ang. rectangular) i zapis kartezjański. Powiedziałem ci, że oś urojoną wstawiliśmy, bo była nam potrzebna do znalezienia prostego sposobu zapisu. Teraz poradzimy sobie bez niej.

Spójrz na **rysunek 5**. Znów mamy płaszczyznę zespoloną. Tę samą liczbę z, reprezentowaną na rysunku 3 przez punkt z możemy określić, podając odległość od punktu początkowego (zerowego) oraz kąt, jaki powstały odcinek, a właściwie wektor, tworzy z dodatnim zwrotem osi liczb rzeczywistych.

W takim zapisie liczbę zespoloną z reprezentować będzie tak zwany moduł r (odległość od początku układu współrzędnych) oraz argument ϕ (czyli wspomniany kąt). Taki sposób zapisu liczb zespolonych nazywamy wykładniczym lub biegunowym (ang. polar).

Teraz naszą liczbę z umiemy zapisać w dwóch postaciach:

$$z = 2+j2 = 2\sqrt{2}\, e^{j45^\circ}$$



Rys. 5.

$2\sqrt{2}$ to moduł, 45 stopni to argument, e to liczba Nepera, podstawa logarytmów naturalnych (w przybliżeniu e=2,71828182...). Nie musisz rozumieć, skąd i dlaczego w zapisie pojawiła się liczba e. Powinieneś tylko wiedzieć, jaki jest sens takiego zapisu. A to, jak pokazuje rysunek 5, jest beznadziejnie proste.

Cały czas pamiętaj też, że w obu wypadkach naszą liczbę z reprezentuje na płaszczyźnie ten sam punkt. My tylko w różny sposób to zapisujemy.

Poniżej podaję ci kilka przykładów zapisu liczb zespolonych w postaci wykładniczej:

$f = 5e^{j45^\circ}$

$g = 3e^{j\frac{\pi}{2}}$

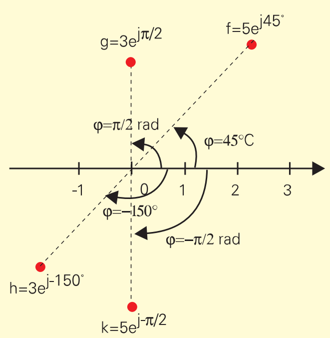
$h = 3e^{-j150^\circ}$

$k = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$

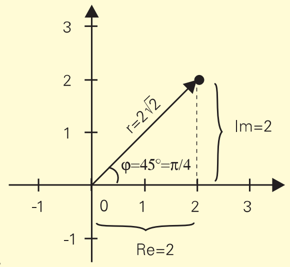
Druga i czwarta liczba mają argument podany nie w stopniach, tylko w mierze łukowej – w radianach (π radianów (w przybliżeniu 3,14159265 radianów) to 180 stopni). Na **rysunku 6** możesz zobaczyć geometryczną interpretację tych liczb.

Teraz, jak cię znam, zapytasz jak zamieniać postać algebraiczną na wykładniczą i na odwrót.

To proste. Popatrz na **rysunek 7**. Jeśli mamy postać algebraiczną (mamy Re



Rys. 6.



Rys. 7.

i Im), to musimy obliczyć moduł r, korzystając choćby z twierdzenia Pitagorasa, oraz argument ϕ, korzystając z definicji którejś z funkcji trygonometrycznej.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy moduł:

$$r = \sqrt{(Re^2 + Im^2)}$$

Dla naszej liczby z:

$$r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{4*2} =$$
$$= \sqrt{4} * \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Z definicji funkcji sinus lub cosinus obliczamy argument:

$$\sin\phi = \frac{Im}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

możemy też wykorzystać funkcję cosinus:

$$\cos\phi = \frac{Re}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

stąd oczywiście $\phi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radianów.

W tym wypadku zdarzyło się, że sinus i kosinus naszego kąta mają tę samą wartość $\frac{1}{\sqrt{2}}$ – jest to szczególny przypadek, dla większości kątów wartości te będą różne, co niczego nie zmienia.

Tą metodą możemy zamieniać zapis z algebraicznego na wykładniczy.

W drugą stronę pójdzie chyba jeszcze łatwiej:

Zauważ, że na podstawie podanych powyżej wzorów na sinus i kosinus kąta ϕ możemy zapisać:

$Im = r * \sin\phi$

$Re = r * \cos\phi$

Piszemy więc po prostu:

$re^{j\phi} = (r * \cos\phi) + j(r * \sin\phi)$

Ten ostatni sposób zapisu liczb zespolonych nazywany trygonometrycznym.

Wystarczy obliczyć wartość kosinusa i sinusa kąta ϕ, a potem pomnożyć przez r.

A oto przykłady liczb zespolonych w zapisie trygonometrycznym:

$l = (5{,}21 * \cos 67^\circ) + j(5{,}21 * \sin 67^\circ)$

$m = (4 * \cos(-142^\circ)) - j(4 * \sin(-142^\circ))$

$n = -(195 * \cos(\frac{\pi}{3})) + j(195 * \sin(\frac{\pi}{3}))$

Naszą liczbę z umiemy już zapisać na trzy sposoby:

$z = 2+j2 = 2\sqrt{2}\, e^{j45^\circ} =$

$= (2\sqrt{2} * \cos 45^\circ) + j(2\sqrt{2} * \sin 45^\circ)$

A teraz w ramach ćwiczenia, możesz samodzielnie wyrazić podane liczby zespolone b...n na wszystkie trzy sposoby. Potrzebny do tego będzie kalkulator z funkcjami trygonometrycznymi. Gdy masz moduł r i argument ϕ, będziesz wykorzystywał klawisze sin, cos. Gdy masz część rzeczywistą Re i urojoną Im, do obliczenia kąta wykorzystasz funkcje arcus sinus i arcus cosinus, dostępne zazwyczaj po naciśnięciu klawiszy inv sin, inv cos.

Niektóre kalkulatory naukowe potrafią przeliczać liczby zespolone z jednej postaci na drugą za jednym naciśnięciem klawisza – sprawdź to w instrukcji twojego kalkulatora. Jeśli znajdziesz skrót „rect(angular)- polar" (lub P-R R-P)- to jest ta funkcja

Działania na liczbach zespolonych

Zaspokoiłeś swoją ciekawość, ale wcale nie bawi cię żmudne przeliczanie. Czy nie wystarczyłaby jedna postać liczb zespolonych?

Nie! Chodzi o obliczenia na tych liczbach. Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych bardzo prosto przeprowadza się na postaci algebraicznej: po prostu sumujemy lub odejmujemy części rzeczywiste i części urojone:

Wykonajmy działania:

$(3+j2) + (-1+j3) = (3-1) + j(2+3) = 2+j5$

$(-3-j1) - (2-j2) = (-3-2) + j(-1-(-2)) = -5 + j1$

Interpretację geometryczną tych działań narysuj sam, jeśli chcesz; przekonasz się wtedy , że jest to po prostu znane ci ze szkoły dodawanie wektorów.

Przy okazji: widzisz chyba jasno, że w przypadku liczb zespolonych traci sens określenie: liczba większa lub liczba mniejsza. Możemy jedynie mówić o większym lub mniejszym module. W elektronice przy obliczeniach impedancji często interesować nas będzie właśnie wartość modułu impedancji.

Liczby w postaci algebraicznej można też mnożyć i dzielić. Nie będą ci tu podawał szczegółów – znajdziesz je w książkach. Zapamiętaj jedynie, że bardzo łatwe jest mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci wykładniczej. Uważaj!

Mnożenie: mnożymy moduły, a argumenty dodajemy.

Dzielenie: moduły dzielimy, argumenty odejmujemy.

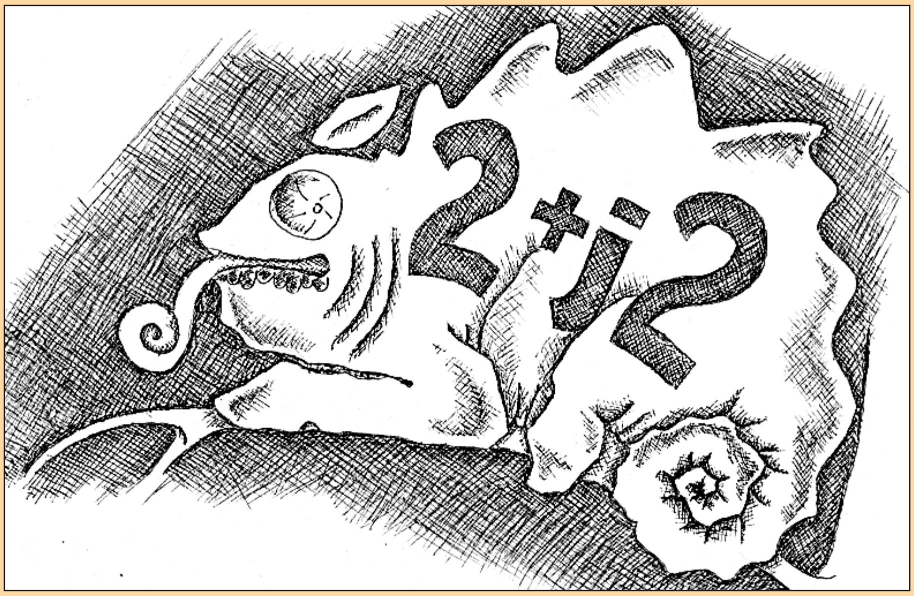
Dla podanych wcześniej liczb f, g, h, k obliczymy:

$$f*h = 5e^{j45^\circ}*3e^{-j150^\circ} = 5*3e^{j(45^\circ+(-150))} = 15e^{-j105^\circ}$$

$$\frac{g}{k} = \frac{3e^{j\frac{\pi}{2}}}{5e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{3}{5e^{j(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}))}} = 0{,}6e^{j\pi}$$

Graficzną ilustrację tych działań po odrobinie zastanowienia narysujesz sam. Przy okazji w ostatnim obliczeniu otrzymaliśmy ciekawy wynik. Co to znaczy, że argument wynosi π radianów, czyli 180 stopni? 180 stopni? Przecież to jest po prostu liczba rzeczywista ujemna:

$0{,}6e^{j\pi} = -0{,}6$



Z tego, co dotychczas tłumaczyłem ci o rozwoju pojęcia liczby, począwszy od liczb naturalnych do zespolonych, można wyciągnąć wniosek, że działania matematyczne na liczbach zespolonych nie powinny w żaden sposób kolidować z zasadami obliczeń na liczbach rzeczywistych. Tak jest w istocie – wprowadzenie liczb zespolonych rozszerza tylko możliwości obliczeń. Co prawda komplikuje nieco te obliczenia, ale wcale nie jest aż takie trudne jak ci się wydawało.

A teraz powrócimy na chwilę do liczb rzeczywistych.

Liczby rzeczywiste, to takie liczby zespolone, które w zapisie algebraicznym mają część urojoną równą zeru, a w zapisie wykładniczym argument, czyli kąt jest równy zero (liczby dodatnie) lub 180°, czyli π radianów (liczby ujemne).

Spróbuj wykonać działania na kilku liczbach rzeczywistych, przedstawionych w postaci liczb zespolonych, a przekonasz się, że wszystko się zgadza z naszymi dotychczasowymi doświadczeniami.

Jeśli w końcówce trochę się zgubiłeś, i nie jesteś pewny, czy dobrze zrozumiałeś zasady wykonywania obliczeń na liczbach zespolonych, nie załamuj się. Ja chciałem ci tylko wytłumaczyć podstawy i rozszerzyć horyzonty. Przeczytaj jeszcze raz materiał z tego i poprzedniego mojego listu, a szczegóły wykonywania obliczeń znajdziesz w podręcznikach. Możesz też zwrócić się o pomoc do nauczyciela matematyki lub elektrotechniki.

Mam nadzieję, że teraz lepiej rozumiesz pojęcie liczby i pojąłeś, dlaczego liczby zespolone doskonale nadają się do obliczeń związanych z opornością (impedancją).

Czy teraz wiesz, dlaczego wcześniej wychodziło nam, że reaktancje indukcyjna i pojemnościowa są „odwrotne”, czyli mają jakby przeciwny znak? Teraz chyba już wiesz, dlaczego „om, omowi nie równy”.

Przejrzyj jeszcze raz poprzednie listy i spróbuj poukładać sobie w głowie podane wiadomości. Jeśli jakaś sprawa nadal nie jest dla ciebie jasna, napisz do mnie.

Wykonaj też zadanie domowe. Będzie to sprawdzianem, czy zrozumiałeś sprawę zastosowania liczb zespolonych do zapisu i obliczeń wartości impedancji. Niech to będzie także konkurs dla początkujących. Zadania konkursowe znajdziesz w ramce. Wśród osób, które nadeślą prawidłowe rozwiązania, zostaną rozlosowane nagrody-niespodzianki.

Ze względu na bardzo dużą ilość listów nadchodzących do redakcji, bardzo proszę, żebyś rozwiązanie nadesłał w kopercie z wyraźnym dopiskiem „LICZBY ZESPOLONE”.

Tyle na dziś.

Piotr Górecki

grafika: Małgorzata Zackiewicz

Ps. Za miesiąc nie będę cię męczył żadną teorią, napiszę Ci coś o sprawach czysto praktycznych.

Konkurs

Zadania:

1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej następujące oporności:
   rezystancję R = 10Ω, reaktancję pojemnościową X = 10Ω i reaktancję indukcyjną X = 10Ω.
2. Zapisz w postaci liczby zespolonej wypadkową oporność szeregowego połączenia rezystora 10Ω i kondensatora, który dla pewnej częstotliwości ma reaktancję 10Ω?
3. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz punkt odpowiadający tej liczbie.
4. Wyjaśnij w jednym zdaniu, lub posługując się wzorem matematycznym, dlaczego wypadkowa reaktancja obwodu szeregowego LC dla częstotliwości rezonansowej jest równa zeru.