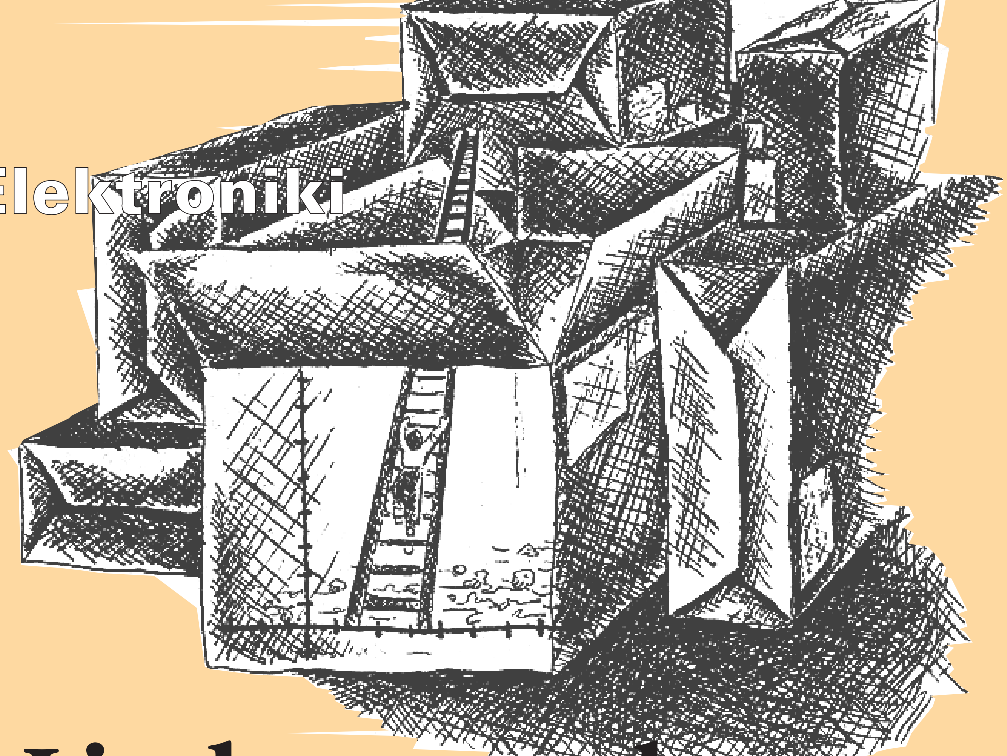


Napisałem do Ciebie już kilkanaście listów, a nie opowiedziałem Ci jeszcze żadnej bajki. Dziś będzie bajka. Do tej pory dokonywaliśmy zbyt daleko idącego uproszczenia i traktowaliśmy reaktancje po prostu jako oporność, wyrażoną w omach. Musimy to jakoś uściślić i wprowadzić ten nieszczęsny kąt przesunięcia. Potrzebne będą do tego liczby zespolone. Prawdopodobnie spotkałeś się już z określeniami: liczba urojona, jednostka urojona, itp. Już sama taka nazwa może przyprawić o niestrawność lub wysypkę na plecach. Tymczasem sprawa nie jest wcale taka trudna, jak ci się wydaje. Spróbuję ci to wyjaśnić tak, jak tłumaczyłem swemu synowi.

Liczby zespolone

Bajeczka o liczbach

Przed trzema tysiącami lat, na wybrzeżu Morza Śródziemnego, a właściwie na wysepce oddalonej o kilometr od lądu leżało miasto Tyr. Było to główne miasto Fenicjan, starożytnych żeglarzy i kupców. Fenicjanie byli narodem bardzo przedsiębiorczym, założyli liczne kolonie na wybrzeżu Morza Śródziemnego, Morza Czerwonego, podobno docierali nawet na Bałtyk. Szczycili się wysoką kulturą i poziomem wiedzy. Głównym źródłem bogactwa Fenicjan był handel.

Ich statki przemierzały morza przewożąc najróżniejsze towary. Jeden z takich statków woził owce z Palestyny do różnych portowych miast śródziemnomorskich. Podczas długich morskich podróży dwóch młodych kupców fenickich zabawiało się rozrywkami umysłowymi (nie pamiętam już ich imion, bo to było strasznie dawno). Ćwiczyli oni swoje umiejętności rachunkowe. Przydawało im się to przy zakupie i sprzedaży owiec. A zadanie mieli niełatwe. W tamtych czasach nikt nie słyszał jeszcze o cyfrach rzymskich, ani tym bardziej o cyfrach arabskich, nierzadko można było spotkać ludzi, którzy liczyli następująco: raz, dwa, trzy, mnóstwo.

Fenicjanie, jako jedni z pierwszych, w miejsce niewygodnych znaków hieroglificznych, wprowadzili pismo alfabetyczne. Wprowadzili też system zapisu liczb. Wcześniej zapisywano liczby słowami. Fenicjanie zapisywali małe liczby pionowymi kreskami; zapis II III III oznaczał osiem. Liczbę dziesięć zapisywali poziomą kreską – a liczbę dwadzieścia znakiem podobnym do litery H. Na przykład liczbę siedemdziesiąt zapisywali -HHH. Liczbę sto zapisywali znakiem podobnym do π. Nie znali liczby tysiąc. Liczbę tysiąc określali jako dziesięć setek.

Nasi dwaj młodzi Fenicjanie ćwiczyli się w dodawaniu i odejmowaniu. Nawet dobrze sobie z tym radzili. Powstał jednak między nimi spór. Zastanawiali się, czy można odjąć liczbę większą od mniejszej. Jeden twierdził stanowczo: nie można. Drugi przypuszczał, że powinno to być możliwe, tylko trzeba wyobrazić sobie 'liczby odwrotne'. Pierwszy stanowczo się sprzeciwiał: „Czy widziałeś kiedyś 'odwrotne owce'? Czy mając na statku sześćdziesiąt pięć owiec, możesz sprzedać sycylijczykom siedemdziesiąt? To jest bez sensu!" Według niego po prostu nie można było wykonać takiego działania. Drugi oponował: „Nie myśl o owcach. Pomyśl o liczbach. A może są takie liczby 'odwrotne'?" Pierwszy nadal stanowczo twierdził, że takich liczb, podobnie jak 'odwrotnych owiec', po prostu nie ma i nie ma najmniejszego sensu zawracać sobie tym głowy.

A co ty o tym sądzisz?

Uśmiechasz się z politowaniem. Ale pamiętaj, że było to trzy tysiące lat temu. W tamtych czasach znano tylko liczby, które dziś nazywany naturalnymi. Nie znano pojęcia zera. Zero i liczby ujemne wprowadzono do użytku w Indiach dopiero ponad tysiąc sześćset lat później. Nasz dziesiątkowy, pozycyjny system liczenia i cyfry (nazywane dziś arabskimi) przywędrowały z Indii za pośrednictwem Arabów i rozpowszechniły się w Europie dopiero w drugiej połowie naszego tysiąclecia! Wcześniej przez setki lat stosowany był rzymski system liczbowy. Zauważ, że w systemie rzymskim też nie ma liczb ujemnych, nie ma też zera, w zasadzie nie ma też ułamków.

Wspomniani dwaj młodzi Fenicjanie toczyli spór, czy istnieją „odwrotne liczby'. Pierwszy uważał, że liczba naprawdę istnieje tylko wtedy, jeśli można pokazać przykład jej zastosowania. Ponieważ nie widział możliwości zastosowania 'odwrotnych liczb' twierdził, że takowe nie istnieją.

Drugi gotów był dopuścić istnienie 'odwrotnych liczb' tylko dlatego, że ich wprowadzenie pozwoliłoby bez ograniczeń przeprowadzać odejmowanie dowolnych, znanych mu liczb. Dla niego liczba istniała, jeśli jej użycie pasowało do wcześniej znanych zasad, i jeśli całość tworzyła jakiś zwarty system.

A jak ty sądzisz? Co to znaczy, że liczba istnieje?

Czy też uważasz, że liczba istnieje tylko wtedy, gdy ma jakieś powiązania z rzeczywistością? Czy raczej gotów jesteś uznać, że liczba istnieje, jeśli należy do jakiejś grupy, i wraz z innymi liczbami i działaniami na nich tworzy jakiś spójny, niesprzeczny system?

Zastanów się chwilę nad tym!

Dziś wiemy, że istnieją liczby 'odwrotne' – przecież na każdym kroku spotykamy się z liczbami ujemnymi. Sprawa jest prosta – liczby te istnieją nie tylko jako abstrakcyjne pojęcia, ale przypisujemy im konkretną treść, na przykład wartość temperatury w zimowy, mroźny dzień. Potrafiliśmy więc pogodzić oba poglądy – znaleźliśmy praktyczny sens liczb 'odwrotnych' czyli ujemnych.

Ale idźmy dalej. Ci dwaj starożytni Fenicjanie mieli także kłopoty z dzieleniem. Czasami udawało się bez kłopotu podzielić dwie liczby: na przykład wspomniane sześćdziesiąt pięć dorodnych owiec potrafili podzielić równo pomiędzy pięciu kupców sycylijskich. Ale już przy sześćdziesięciu siedmiu owcach, dwie pozostawały bez przydziału. Na ten temat również zawzięcie dyskutowali: czy istnieje liczba, będąca wynikiem dzielenia sześćdziesięciu siedmiu na pięć części.

Listy od Piotra

Znów spór związany był z nieznajomością pojęcia liczb, zwanych dziś ułamkowymi.

Ty chyba nie masz wątpliwości, że liczby ułamkowe istnieją.

Idźmy jeszcze dalej.

Gdyby wspomniani Fenicjanie jeszcze głębiej wchodzili z problemy liczb i działań na nich, to może zauważyliby, że dla niektórych liczb (np. 1, 4, 9, 16, 25) istnieją liczby, które pomnożone przez siebie dają pierwotną liczbę. Wprowadziliby pojęcie pierwiastka (kwadratowego) z liczby. Wtedy znów mogliby dyskutować, czy dla liczb 2, 3, 5, 6, 7, itd, istnieją liczby będące ich pierwiastkami. Zapewne znów pierwszy z nich twierdziłby stanowczo, że takich liczb nie ma, bo w żaden sposób nie wiążą się one z rzeczywistością (czyli z owcami).

Ponad tysiąc lat po czasach opisywanych Fenicjan, w Grecji rozwinęła się geometria. Uczeni greccy potrafili sobie wyobrazić pojęcie liczby ułamkowej, jako stosunku dwóch liczb (naturalnych).

Ale już Grecy wiedzieli, że jeśli mamy kwadrat o boku dowolnej długości a, to nie istnieją dwie liczby, których stosunek wyrażałby długość przekątnej tego kwadratu. A przecież przekątna kwadratu istnieje, można ją narysować. Niewątpliwie ma też jakąś długość. Tymczasem długości tej nie można było wyrazić za pomocą jakiejkolwiek znanej wtedy liczby (ułamkowej). Potrzebna była do tego liczba, która pomnożona przez samą siebie, dawałaby liczbę dwa, a liczby tej nie da się przedstawić w postaci ułamka. Dziś powiemy, że liczba pierwiastek z dwóch jest liczbą niewymierną.

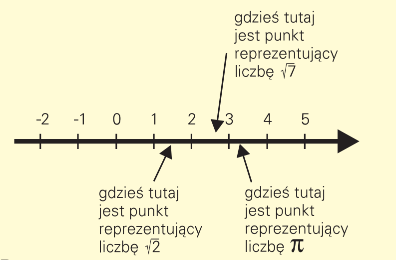
Podobnie było z liczbą, wyrażającą stosunek długości okręgu do jego średnicy. Tej liczby również nie można zapisać w postaci ułamka – w postaci ułamka można podać tylko jej przybliżoną wartość.

Czy to znaczy, że nie istnieją potrzebne liczby?

Ależ istnieją – przecież chodzi tu o pierwiastek (drugiego stopnia) z dwóch i o słynną liczbę π! Ale znów cię zapytam, co to znaczy, że liczby te istnieją? Po pierwsze istnieją jako pojęcia abstrakcyjne, wymyślone na podstawie teoretycznych rozważań. Po drugie istnieją, bo mają praktyczny sens – pierwsza jest związana z każdym kwadratem, druga – na przykład z okręgiem, kołem i kulą.

Podsumujmy.

Najpierw zajmowaliśmy się liczbami naturalnymi. Wraz z działaniem dodawania liczby te tworzyły zwartą grupę – można było bez



Rys. 1.

ograniczeń wykonywać działanie dodawania. Ale by przeprowadzać bez ograniczeń odejmowanie, należało wprowadzić pojęcie zera i liczb całkowitych ujemnych. Dla bezproblemowego przeprowadzania dzielenia, trzeba było wprowadzić liczby ułamkowe. Działanie znane jako pierwiastkowanie zmusiło do wprowadzenia liczb niewymiernych.

W sumie wszystkie wymienione liczby należą do zbioru tak zwanych liczb rzeczywistych.

Na liczbach rzeczywistych możemy przeprowadzać operacje dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia. Nie ma problemów.

W szkole, od pierwszych klas podstawówki pojęcie liczby obrazuje się nie przy pomocy owiec, tylko z wykorzystaniem osi liczbowej. Na osi tej mamy liczby całkowite, w tym zero i liczbę 1 – zobacz **rysunek 1**.

Mamy też liczby ułamkowe – niejako „wypełniają” one oś pomiędzy liczbami całkowitymi. Na osi liczb rzeczywistych znajduje się nieskończenie wiele punktów. Jeden z nich odpowiada wspomnianemu pierwiastkowi z dwóch, inny punkt reprezentuje liczbę π.

I oto doszliśmy do kresu naszej bajeczki.

Teraz pytanie kontrolne. Czy jesteś przekonany, że dla dowolnej liczby dodatniej istnieje jej pierwiastek?

Nie ma wątpliwości, istnieje – nawet wtedy gdy chodzi o liczbę niewymierną! Możemy na przykład mówić o czymś takim jak pierwiastek z liczby π – nie ma tu żadnego problemu.

Ale zajmijmy się tym nieco głębiej.

Weźmy liczbę 7. Dla liczby 7, wynikiem pierwiastkowania jest liczba niewymierna $\sqrt{7}$ – inaczej, prościej nie możemy tego zapisać. Jeśli szybko sięgniesz po kalkulator i wykonasz obliczenie, otrzymasz na wyświetlaczu liczbę 2,645751311. Ale jest to tylko przybliżenie, podane w postaci ułamka dziesiętnego z dokładnością do dziewięciu cyfr po przecinku. „Prawdziwa” liczba $\sqrt{7}$ nie da się przedstawić w postaci żadnego ułamka, właśnie dlatego, że jest liczbą niewymierną. Liczbie $\sqrt{7}$ odpowiada jednak na osi liczbowej pewien konkretny punkt. Leży on na osi gdzieś pomiędzy punktami, oznaczonymi 2 i 3.

Możemy to uogólnić: dla dowolnej liczby nieujemnej a istnieje jej pierwiastek kwadratowy, czyli liczba b, która pomnożona przez samą siebie, da liczbę a. Wszystko jasne!

A czy istnieje pierwiastek kwadratowy z liczb ujemnych, na przykład z liczby -1?

Pewnie odpowiesz, że nie! Rzeczywiście, wygląda na to, że nie ma, bo przecież $(-1)^2 = 1$, i $1^2 = 1$! A więc nie ma liczby, która pomnożona przez samą siebie da w wyniku -1...

Ha! Mam cię! Nieprzypadkowo opowiadałem ci o tych Fenicjanach. Czy przypadkiem nie naśladujesz pierwszego Fenicjanina, który twierdził, że nie ma „odwrotnych liczb”, podobnie jak nie ma „odwrotnych owiec”???

Teraz ty mówisz dokładnie to samo: nie ma pierwiastka z -1, bo każda liczba podniesiona do kwadratu daje liczbę dodatnią. Na osi liczbowej nie ma punktu odpowiadającego takiej liczbie.

A dlaczego, niczym pijany płotu, trzymasz się wyobrażenia liczby, jako punktu na osi liczbowej? Zachowujesz się jak tamten Fenicjanin, który nie potrafił oddzielić pojęcia liczby od owiec, którymi handlował.

No więc jak to jest, czy naprawdę nie istnieje taka liczba, jak $\sqrt{-1}$?

Popraw się! Od czasów opisywanych Fenicjan minęło już trzy tysiące lat.

No właśnie... A może jednak istnieje liczba, która podniesiona do kwadratu, daje -1...

Co to za liczba? To po prostu $\sqrt{-1}$, inaczej nie potrafimy jej zapisać. Liczbę $\sqrt{7}$ zapisywaliśmy w przybliżeniu jako 2,645751311; wiemy, że odpowiada jej pewien punkt na osi liczbowej.

Tymczasem liczby $\sqrt{-1}$ nie możemy zapisać w postaci jakiegoś ułamka, zresztą intuicyjnie czujemy, że musi ona mieć jakiś związek z liczbą 1, a nie jakimkolwiek ułamkiem. Ale częściowo masz rację: rzeczywiście, liczbie $\sqrt{-1}$ nie odpowiada żaden punkt naszej osi liczbowej. A więc może jednak ona nie istnieje...

Nie bądź dziecinny! Nie łącz liczb z owcami!

Liczba $\sqrt{-1}$ na pewno istnieje, tylko ty na razie nie potrafisz znaleźć jej intuicyjnej analogii, czy reprezentacji.

Rusz głową!

Jeśli już widzisz związek z opornością, a właściwie impedancją, to szczerze ci gratuluję!

Jeśli jeszcze nie, to poczekaj do następnego listu.

Piotr Górecki
grafika: Małgorzata Zackiewicz
c.d. w EdW 8/97